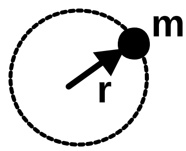
Aufgabenstellung:
1. **Theoretische Bestimmung des Trägheitsmomentes**
2. **Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes**

jeweils für hängende und abgespreizte Arme und Beine

Rotationsenergie und Trägheitsmoment:

Auch in einer Rotationsbewegung ist Energie gespeichert. Die periodische Umwandlung von Höhenenergie in Rotationsenergie und umgekehrt zeigt sich z.B. beim sogenannten Maxwellschen Rad, bei "Nicht-Physikern" auch als JoJo bekannt.
Der Ausdruck für die **Rotationsenergie E_{Rot} eines Massenpunktes im Abstand r vom Drehzentrum** ergibt sich aus dem bekannten Ausdruck für die Bewegungsenergie $E_B = ½\, m\, v^2$,
indem man die Bahngeschwindigkeit v durch die Winkelgeschwindigkeit ω ersetzt:



$$\boxed{E_B = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot (r\cdot\omega)^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2\cdot\omega^2 = \boxed{\frac{1}{2}\cdot J\cdot\omega^2 = E_{Rot}}$$

Vergleicht man den Ausdruck für die **lineare Bewegung (links)** mit dem für die **Rotationsbewegung (rechts),** so erkennt man das nun die Winkelgeschwindigkeit ω (anstelle der linearen Geschwindigkeit v) die Bewegung beschreibt, und der Anteil $J = m\, r^2$ (anstelle der trägen Masse m) den rotierenden Körper.

Diesen Anteil nennt man **Trägheitsmoment**. Um das Trägheitsmoment eines beliebigen Körpers zu berechnen, denkt man ihn sich aus lauter Massepunkten zusammengesetzt. Für die Massen m_1, m_2, m_3,…im Abstand r_1, r_2, r_3,..vom Drehzentrum ergibt sich somit als **Rotationsenergie**:

$$E_{Rot} = \frac{1}{2}\cdot\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\right)\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot J\cdot\omega^2$$

Die Summe in der Klammer bezeichnet man als **Trägheitsmoment J des Körpers bzgl. der Drehachse**.

Um einen Körper in Drehbewegung zu versetzen, benötigt man ein **Drehmoment M = F*r** (Kraft * Hebelarm), d.h. eine Kraft F senkrecht zum Radiusvektor r. Die Kraft F verrichtet längs des Kreisbogens $b = r*\varphi$ die Arbeit $W = F*b = F*r*\varphi$ und führt zu einer **gleichmäßig beschleunigten Drehbewegung** mit der Winkelbeschleunigung $\alpha = d\omega/dt$. Analog zum zurückgelegten Weg $s = ½\, a\, t^2$ bei der linear beschleunigten Bewegung ergibt sich für den durchlaufenen Drehwinkel $\phi = ½\, \alpha\, t^2 = ½\, (d\omega/dt)\, t^2$ bei der beschleunigten Drehbewegung. Setzt man verrichtete Arbeit $W = F*r*\phi = F*r*½\, \alpha\, t^2$ und erreichte Rotationsenergie E_{Rot} gleich, folgt daraus:

$$W_{Rot} = \frac{1}{2}\cdot M\cdot\alpha\cdot t^2 = E_{Rot} = \frac{1}{2}\cdot J\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot J\cdot(\alpha\cdot t)^2 = \frac{1}{2}\cdot J\cdot\alpha^2\cdot t^2$$

und damit den Zusammenhang zwischen Drehmoment (als Ursache) und Winkelbeschleunigung α (als Wirkung), d.h. das **Grundgesetz der Mechanik für die Drehbewegung:**

$$\boxed{M = J\cdot\alpha = J\cdot\frac{d\omega}{dt}}$$ analog zum linearen Ausdruck $$\boxed{F = m\cdot a = m\cdot\frac{dv}{dt}}$$

Man erkennt, daß das

- Analogon zur linearen Geschwindigkeit v die Winkelgeschwindigkeit $\omega = v * r$ ist.
- Analogon zur beschleunigenden Kraft F das Drehmoment $M = F * r$ ist.
- Analogon zur trägen Masse m das Trägheitsmoment $J = \Sigma\, (m_i * r_i^2)$ ist.
- Analogon zur Bewegungsenergie $E_B = ½\, mv^2$ die Rotationsenergie $E_{Rot} = ½\, J\, \omega^2$ ist.

Es liegt es nahe, analog zum linearen Impuls **p = m*v** einen Drehimpuls **L = J *** w zu definieren.

Der **Drehimpulserhaltungserhaltungssatz** $\boxed{L = J\cdot\omega = \left(\Sigma_i\ m_i\cdot r_i^2\right)\cdot\omega = konst}$ zeigt sich eindrucksvoll beim sogenannten Drehschemelversuch oder beim Pirouettendrehen der Eiskunstläufer.

Aufgabenstellung:

1. Stellen Sie sich auf den Drehteller und nehmen Sie zwei Hanteln in beide Hände. Lassen Sie sich bei ausgestreckten Händen anschieben bzw. "andrehen" und ziehen Sie die Hanteln langsam (!!) an den Körper heran und wieder auseinander. Versuchen Sie, ihre Beobachtung mit Hilfe von Rotationsenergie $E_{Rot} = ½\ J\ \omega^2$ und Drehimpuls $L = J\ \omega$ zu erklären. Welche Größe bleibt erhalten, welche nicht?

2. Stellen Sie sich auf den Drehteller und nehmen Sie das rotierende Speichenrad in die Hand. Drehen Sie nun die Achse des Speichenrades nach links bzw. nach rechts. Versuchen Sie, ihre Beobachtung mit Hilfe von Rotationsenergie $E_{Rot} = ½\ J\ \omega^2$ und Drehimpuls $L = J\ \omega$ zu erklären. Welche Größe bleibt erhalten, welche nicht?

3. Basteln Sie aus Karton einen Hampelmann und kleben Sie an beide Hände und Füße (symmetrisch) kleine Gewicht– bzw. Geldstücke von ca. 10–20g.

4. Schätzen Sie das Trägheitsmoment des gesamten Hampelmannes ab, indem Sie die Massen von Rumpf, Armen und Beinen messen und den jeweiligen Abstand von der Drehachse. Für ausgedehnte Körper (Rumpf) nehmen Sie einen mittleren Abstand an.

	Masse	Abstand von der Drehachse bei	
	m	hängenden Gliedmaßen	abgespreizten Gliedmaßen
Rumpf und Drehachse	$m_0 =$	$r_0 =$	$r_0 =$
Arme	$m_A =$	$r_{A1} =$	$r_{A2} =$
Beine	$m_B =$	$r_{B1} =$	$r_{B2} =$
Zusatzmasse Arme	$m_{ZA} =$	$r_{ZA1} =$	$r_{ZA2} =$
Zusatzmasse Beine	$m_{ZB} =$	$r_{ZB1} =$	$r_{ZB2} =$
Trägheitsmoment	$J = \Sigma\ (m\ r^2)$	$J_1 =$	$J_2 =$

5. Für die messende Bestimmung der Trägheitsmomente gehen sie folgendermaßen vor:
- Wählen Sie als Fallhöhe des Zugkörpers die Tischhöhe.
- Die Zugmasse sollte so gewählt werden, daß die Drehbeschleunigungen gering genug sind, um beobachtet zu werden und die Zeitnahme verläßlich zu machen.
- Gemessen werden die Zeiten, in denen die Zugmasse die Fallstrecke zurücklegt.
- Messen Sie die Zeiten bei abgespreizten und hängenden Gliedmaßen (Fixierung!).

6. Berechnen Sie aus Ihren gemessenen Zeiten t (Mittelwert aus drei Messungen) das **Trägheitsmoment J** mit Hilfe folgender Formeln (Erklärung siehe vorne):

Grundgesetz der Mechanik für die Rotation (Wirkung = Winkelbeschleunigung)	$J \cdot \alpha = J \cdot \frac{d\omega}{d\,t} = M = F \cdot r_{Achse}$	Drehmoment als Ursache (Kraft ∗ Hebelarm)
Winkel-beschleunigung	$\alpha = \frac{d\,\omega}{d\,t} = \frac{d\,(v / r_{Achse})}{d\,t} = \frac{a}{r_{Achse}}$	Bahnbeschleunigung (Seilbeschleunigung auf der Antriebsachse)
Zusammenhang zwischen Seilbeschleunigung und Fallhöhe h und Fallzeit t	$a = \frac{2\,h}{t^2}$ aus $h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	Gemessen wird h und t