1 Fouriersynthese und Fourieranalyse

1.1 Stehende Wellen / Eigenschwingungen / Resonanz

- Bei **einfacher** Reflexion bildet sich immer eine stehende Welle vor der Wand aus
- Bei **mehrfacher** Reflexion nur unter bestimmten Bedingungen (Randbedingungen)

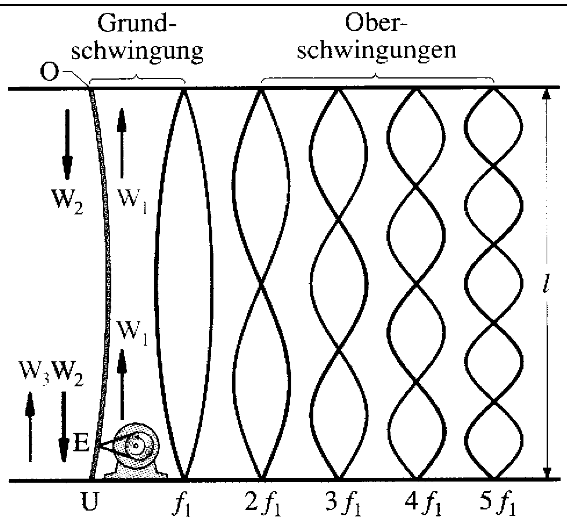
Versuch: Stehende Wellen mit Gummiband

- Gummiband
- verbunden mit Experimentiermotor
- angetrieben mit Sinusgenerator

- **Fortschreitende Welle** durch Gummiband laufen lassen mit Reflexion
- Frequenz langsam erhöhen

- Fortschreitende und stehende Welle nebeneinander und **Unterschiede** aufschreiben **(a)**

- **Stehende Welle**
  - im Knoten packen ⇒ nix tut sich
  - im Bauch packen ⇒ zerstört die Welle
  - ⇒ Randbedingungen entscheidend **(b)**



1.1.1 Unterschiede zw. fortschreitenden und Stehenden Wellen

Fortschreitende Welle	Stehende Welle
▪ Kurvenbild **verschiebt sich** mit der Geschwindigkeit c	▪ Kurvenbild bleibt **räumlich fixiert**
▪ Alle Ortspunkte haben die **gleiche Bewegungsamplitude**. ▪ Alle Ortspunkte erreichen diese zeitlich **nacheinander**	▪ Jeder Ortspunkt hat **unterschiedliche Bewegungsamplituden.** ▪ Alle Ortpunkte erreichen ihre Amplitude **zur gleichen Zeit.**
▪ In keinem Moment ist überall **Stillstand** ▪ In keinem Moment ist überall die **Elongation** null	▪ In Moment größter Elongation ist überall **Stillstand**. ▪ Im gleichen Moment (alle T/2) ist überall die **Elongation** Null (und die Schnelle maximal)
▪ Jeder Ortpunkt innerhalb einer Wellenlänge hat **unterschiedliche Phase**	▪ Alle Ortspunkte innerhalb benachbarter Knoten haben die **gleiche Phase**. ▪ Zu beiden Seiten eines Knotens schwingen Ortspunkte **gegenphasig**.
▪ Kein Punkt ist ständig in Ruhe	▪ **Die Schnelleknoten ruhen ständig**
▪ **Energie schreitet fort**	▪ **Energie bleibt am Ort**, kein Energietransport

1.1.2 Eigenschwingungen (Harmonische) stehender Wellen

Versuchsaufbau abzeichnen lassen (siehe Bild)

- **1.Harmonische) f1**
- **k.te Harmonische f2, f3, f4, ...**

- **Randbedingung: Saitenenden sind Knoten der Bewegung**

  Die Randbedingungen geben die Eigenschwingungen (Wellenlänge) vor

  Besser den **Versuch waagrecht ablaufen lassen** und die Eigenschwingungen in eine Zeile:

		Zusammenhang zwischen	
Zeichnungen		Seillänge	Wellenlänge
	1. Harmonische	L = 1 (λ1 / 2)	λ1 = 2L / 1
	2. Harmonische	L = 2 (λ2 / 2)	λ2 = 2L / 2
	3. Harmonische	L = 3 (λ3 / 2)	λ3 = 2L / 3
	4. Harmonische	L = 4 (λ4 / 2)	λ4 = 2L / 4
	k. Harmonische	L = k (λk / 2)	λk = 2L / k

Aus c = f λ folgt für die Frequenz der

Oberschwingungen $$f_k = \frac{c}{l_k} = c\left(\frac{k}{2L}\right) = k\left(\frac{c}{2L}\right) = kf_1$$ für k = 1,2,3,4,...

zur Grundfrequenz $$f_1 = \frac{c}{2L}$$

d.h. die Frequenzen der Oberschwingungen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz f_1.

Merksatz:

Sind die Enden eines Seils der Länge L **fest eingespannt** und damit **Schwingungsknoten**, so kann der Wellenträger nur zu sogenannten Eigenschwingungen angeregt werden.

Die Frequenz der Oberschwingungen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz:

$$f_k = kf_1 \quad \text{mit} \quad f_1 = \frac{c}{2L}$$

Die Konstante c ist dabei die Geschwindigkeit,
mit der sich eine fortschreitende Welle auf dem Träger ausbreitet.

Frage: **Warum kommt da die Wellengeschwindigkeit c vor ?**
Bem.: (2L / c) ist die Zeit, die die fortschreitende Welle braucht,
um nach zweifacher Reflexion wieder phasenrichtig anzukommen.

Hausaufgabe:
Leiten Sie die Gleichung einer stehenden Welle aus der Überlagerung
zweier gegenläufiger eindimensionaler, fortschreitender Wellen gleicher Frequenz und Amplitude her.

von links nach rechts $$s(t,x) = s \cdot \sin\left[2p\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right)\right]$$

von rechts nach links $$s(t,x) = s \cdot \sin\left[2p\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{l}\right)\right]$$

Additionstheorem $$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

Versuch: Stehende Längswellen mit Schraubenfeder
- Schwinger wird durch Gummiband am Tisch oder Stativfuß gehalten

1.1.3 Resonanz & Oberschwingungen beim Klavier (Musikraum) = Hausaufgabe für Freitag

- **Eigenschwingungen (Harmonische) in der Musik**
  - Grundschwingung (Musik: Grundton)
  - Oberschwingungen (Musik: Obertöne, Partialtöne)

- **Resonanz:**
  Wird ein zu Eigenschwingungen fähiger Wellenträger
  mit einer seiner Eigenfrequenzen angeregt, so tritt Resonanz auf

Überleitung zu den Saiteninstrumenten durch "Hausaufgabe"

- **Schwingungsanregung durch einen Oberton (Partialton)**
  d.h. eine Saite <u>kann</u> mit jeder ihrer Obertöne schwingen

  - Dämpfer von Grundton Saite (G) abheben
  - einzelne Harmonische von G (g, d1, g1, h1, d2, etc.)
    hart ("staccato") anspielen ⇒ G schwingt mit dieser Harmonischen
  - Zwischentöne anspielen (a, f, etc.)
    hart ("staccato") anspielen ⇒ G schwingt nicht !

- **Schwingungsanregung durch mehrere Obertöne**
  d.h. eine Saite schwingt <u>gleichzeitig</u> mit allen ihren Obertönen

  - Dämpfer von Grundton Saite (G) abheben
  - Akkord (d1, g1, h1) hart ("staccato") anspielen
    ⇒ G-Saite schwingt mit allen drei Harmonischen
  - Mit dem Unterarm alle Klaviertasten anspielen
    ⇒ G-Saite schwingt mit allen Harmonischen
    = Dominant-Sept-Akkord (g, d1, g1, h1, d2, f2, g2)

- **Schwingungsanregung eines Obertons durch den Grundton**
  - Dämpfer von oktavierter Saite (g) abheben
  - Grundton (G) hart anspielen
    ⇒ Oktavierte g-Saite schwingt mit eigenem Grundton (g)
    ⇒ G-Saite schwingt gleichzeitig mit allen ihren Harmonischen

- **Übergang zur Fouriersynthese**

1.2 Fourieranalyse und -synthese

EinstiegsVersuch
Akustische Analyse einer Rechteckschwingung (200 Hz) des Frequenzgenerators
durch Überlagerung mit Sinusschwingung
⇒ Schwebungserscheinungen bei den Obertönen (600Hz, 1000Hz)

Was kann man aussagen, wenn man bei höheren Frequenzen Schwebungen hört?

- In der Rechteckschwingung sind - zusätzlich zur Grundschwingung (200 Hz) Sinusschwingungen höherer Frequenz (600 Hz, 1000 Hz, 1400 Hz) verborgen

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830):

Jede beliebige periodische Funktion läßt sich in eindeutiger Weise aus harmonischen Funktionen (Sinus- und Kosinusfunktionen) zusammensetzen:

$$a(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[c_n * \sin(nw_0 t + f_n)]$$

Bem*

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n * \sin(nw_0 t) + b_n * \cos(nw_0 t)]$$

Dabei ist a_0 ein fester Wert unabhängig der Kreisfrequenz w_0. Die beiden Fourierkoeffizienten a_n und b_n (Index n) sind die eigentlich interessanten Bestandteile, welche anhand fest gegebener Algorithmen berechnet werden können.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(t)\sin(nw_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(t)\cos(nw_0 t)\,dt$$

Große Bedeutung der harmonischen Schwingungen für die gesamte Physik

Harmonische Schwingungen sind die **Bausteine**, aus denen sich durch Überlagerung alle periodischen Vorgänge - mögen sie auch noch so kompliziert sein - in eindeutiger Weise zusammensetzen lassen.

Bem*

Um die Phase zu berücksichtigen, nimmt man Cosinus und Sinus
(läßt sich gut mit der Zeigerdarstellung und orthogonale Komponenten (sin & cos) zeigen:
$\varphi = 0 \Rightarrow \sin(n\omega_0 t)$ / $\varphi = \pi \Rightarrow -\sin(n\omega_0 t)$ / $\varphi = \pi/2 \Rightarrow \cos(n\omega_0 t)$ / $\varphi = 3\pi/2 \Rightarrow -\cos(n\omega_0 t)$

Synthese einer Rechteckschwingung (GTR)

auf dem Overheadprojektor vormachen:

- **punktsymmetrisch** zum Ursprung ⇒ **Sinusfunktion**
(bzw. **ungerade Fkt** f(-t) = –f(t)) (Cosinus bei Achsensymetrie)

- **Wellenlänge** λ bzw. Frequenz f = c/λ der Grundfrequenz ist durch
Wellenlänge λ bzw. Periode T = 1/f = λ/c der Rechteckschwingung vorgegeben

- **Achsensymmetrisch**
  zum Bauch bei (λ / 4) zwischen den Knoten
  ⇒ **nur ungeradzahlige Vielfache** (Buckel abziehen / Täler auffüllen)

Exakte Lösung (Rechteckschwingung)

$$A_R(x) = \frac{4a}{p}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \frac{1}{9}\sin(9x) + ... \right)$$

Merke: Alle ungeradzahligen Harmonischen mit reziproker Amplitudenstärke

GTR-Aufgabe: Was passiert, wenn man analog hierzu, nicht nur die ungeradzahligen, sondern auch die geradzahligen, d.h. alle Harmonischen nimmt ??

Lösung (Sägezahnfunktion mit negativer Steigung)

$$A_R(x) = \frac{2a}{p}\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + ... \right)$$

Merke: Alle Harmonischen mit reziproker Amplitudenstärke

Lösung (Sägezahnfunktion mit positiver Steigung)

$$A_R(x) = \frac{2a}{p}\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{5}\sin(5x) - .... \right)$$

Merke: Alle Harmonischen mit reziproker Amplitudenstärke

Lösung (Dreiecksfunktion)

$$A_R(x) = \frac{4a}{p}\left(\sin(x) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sin(3x) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \sin(5x) - \left(\frac{1}{7}\right)^2 \sin(7x) + ... \right)$$

Merke: Alle ungeradzahligen Harmonischen mit quadratisch-reziproken Amplitudenstärke und wechselndem Vorzeichen bzw- wechselnder Phase.

Diese mathematische Zerlegung funktioniert im Orts- oder Zeitraum

Zeitfunktion (an einem Ort)	$\sin(w\ t) = \sin(\frac{2p}{T} t) = \sin(2p\ f\ t)$
Ortsfunktion (zu einem Zeitpunkt)	$\sin(k\ x) = \sin(\frac{2p}{l} x)$

AbschlußVersuch
Akustische Analyse einer Sägezahnschwingung (200 Hz) des Frequenzgenerators
durch Überlagerung mit Sinusschwingung
⇒ Schwebungserscheinungen bei allen Obertönen (400Hz, 600Hz, 800Hz, 1000Hz)