3 Tonsysteme / Musikalische Stimmungen

3.1 Harmonie: Konsonanz und Dissonanz

- Bisher nur mit **einem** Klang bzw. einer Tonhöhe beschäftigt
- Jetzt geht es um das **Zusammenklingen (Konsonanz)** zweier oder mehrerer Klänge

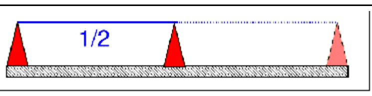
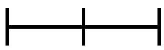
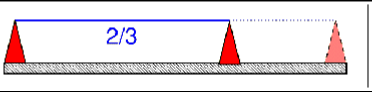
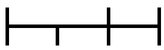
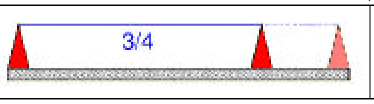
Ergebnis (für später): Die Tonhöhe wird durch die Frequenz bestimmt
Die Tonintervalle durch das **Frequenzverhältnis**

Pythagoras von Samos (570-480 v. Chr.)
- Harmonie = Verhältnis kleiner ganzer Zahlen (Rationale Zahlen)
- Zahlen und Proportionen haben *tieferen Sinn*,

z.B.:
- pythagoräische Zahlen: $a^2 + b^2 = c^2$ (3,4,5)
- platonische Körper, regelmäßige Polyeder

Untersuchung des
- harmonischen Zusammenklangs (Konsonanz) zweier Töne
- Zusammenhangs zwischen Saitenlänge und Tonhöhe

Versuch: Messung der Frequenzen am Monochord mit Oszilloskop
- entweder mit Mikrofon
- oder mit Tonabnehmer d.h. Pick-up-Spule

			$\frac{15}{8} \Big/ \frac{5}{3}$	
		$\frac{5}{3} \Big/ \frac{3}{2}$	**Oktave**	$\frac{f}{f_0} = \frac{2}{1}$
		$\frac{L}{L_0} = \frac{2}{3}$	**Quint**	$\frac{f}{f_0} = \frac{3}{2}$
		$\frac{L}{L_0} = \frac{3}{4}$	**Quart**	$\frac{f}{f_0} = \frac{4}{3}$

Elementare konsonante Tonintervalle
(Konsonanz von Klangintervallen aufgrund zusammenfallender **Obertonspektren**)

Auszug aus Galilei, Galileo: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend",.1638

"Das primäre, unmittelbare Verhältnis der akustischen Intervalle wird weder von der Länge der Saiten noch von ihrer Spannung oder ihrem Querschnitt bestimmt, sondern von der Anzahl der Schwingungen und Lufterschütterungen, die unser Trommelfell treffen und letzteres entsprechend erzittern lassen. Halten wir dieses fest, so können wir mit Sicherheit angeben, weshalb uns einige Zusammenklänge angenehm, andere weniger angenehm und wieder andere sehr mißfallend berühren, also den Grund für die mehr oder minder vollkommene Konsonanz und für die Dissonanz..
Konsonant und wohlklingend werden diejenigen Intervalle sein, deren Töne in einer gewissen Ordnung das Trommelfell erschüttern; wozu vor allem gehört, daß die Schwingungszahlen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, damit die Knorpel des Trommelfells sich nicht in steter Qual befinden, in verschiedenen Richtungen ausweichen zu müssen und den auseinandergehenden Schlägen zu gehorchen.

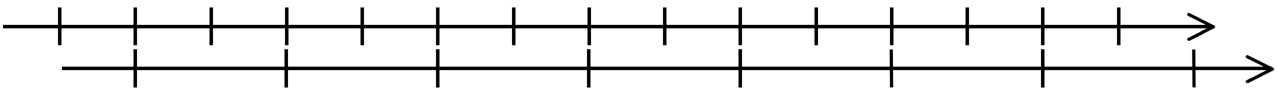
> Deshalb ist die erste und vollkommenste Konsonanz die Oktave, weil auf jede Erschütterung des tieferen Tones zwei des höheren kommen, so daß beide abwechselnd zusammenfallen und auseinandergehen ... Die Quinte klingt auch sehr gut, weil auf die zwei Schwingungen der einen Saite die höhere drei Schwingungen vollführt, von denen also ein Drittel mit denen des tieferen Tones zusammenfällt; und bei der Quarte trifft die vierte Schwingung mit der des Grundtones zusammen. Bei der Sekunde trifft nur noch eine von neun Schwingungen eine Schwingung des tieferen Tones, alle anderen weichen ab, und daher empfindet man bereits eine Dissonanz"

Bemerkung:

- Dies von den Schülern erklären bzw. übersetzen lassen
- **Oktave: "auf jede Erschütterung",**
  d.h. auf eine Periode des tieferen Tones $T_0 = 2\ T$ kommen zwei Perioden des höheren bzw. Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit des höheren Tones $f = 2\ f_0$ doppelt so groß.
- **Quint: "auf zwei Schwingungen der einen" ..:**
  $2\ T_0 = 3\ T$ bzw. $T/T_0 = 2/3$ bzw. $f/f_0 = 3/2$
- **Quarte: "die vierte Schwingung...":**
  $3\ T_0 = 4\ T$ bzw. $T/T_0 = 3/4$ bzw. $f/f_0 = 4/3$

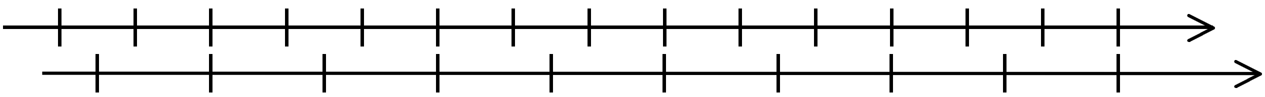
Oktave: ($f = 2\ f_0$)

Der höhere **Klang** ($f_2 = 2\ f_1$) hat nur **Obertöne**,
welche auch im tieferen Klang vorhanden ist



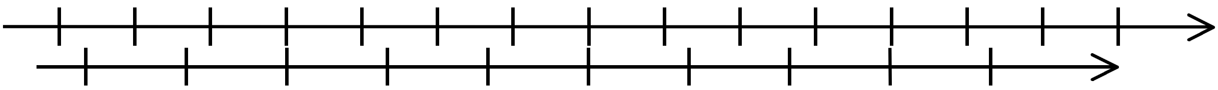
Quint: ($f = 3/2\ f_0$)

Jeder **zweite Oberton** des höheren Klangs
ist im Obertonspektrum des tieferen Klangs enthalten



Quart: ($f = 4/3\ f_0$)

Jeder zweite Oberton des höheren Klangs ($f_2 = 2\ f_1$)
ist im Obertonspektrum des tieferen Klangs enthalten



Merksatz: Zwei Klänge werden als **konsonant** (zusammenklingend) empfunden, wenn sie **viele gemeinsame Obertöne** besitzen. Je geringer die Zahl der gemeinsamen Obertöne, desto **dissonanter** der Zusammenklang.

- Nicht die absoluten Frequenzwerte, sondern die **Frequenzverhältnisse** sind ausschlaggebend, ob Konsonanz oder Dissonanz vorliegen !
- Frequenzverhältnis zweier Töne bezeichnet man als **Tonstufe oder Intervall**
- **Die Schwingungsverhältnisse der Obertöne** entscheiden über Konsonanz und Dissonanz

- **Vollkommene Konsonanzen:** Oktave, Quint
- **Unvollkommene Konsonanzen:** Quarte, große und kleine Terz, große und kleine Sexte
- Dissonanzen: große und kleine Septime, große und kleine Sekund

Bemerkung: **Bezeichnungsweisen für verschiedene Tonlagen:**

	Bezeichnung der Oktav-Anfangstöne								
im deutschen Sprachraum	C_2	C_1	C	c	c^1	c^2	c^3	c^4	c^5
nach Helmholtz	C_{II}	C_I	C	c	c'	c''	c'''	c''''	c^V
nach USA Norm	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8

3.1.1 Aufbau der pythagoräischen Tonleiter über Ganz- und Halbtonintervalle / Monochord

Bemerkungen:

- Pythagoras kannte keine Frequenzen, sondern nur Saitenlängen.
  Dies ist aber gleichwertig mit der folgenden Frequenzbehandlung.
- Die in Klammern angedeutete Abhängigkeit der physikalischen Frequenz von der physikalischen Tonbezeichnung ist keine Abhängigkeit im funktionalen Sinne. Besser wären Indices !!!

Prinzip: **Einem musikalisch empfundenen festen Intervall zweier Töne entspricht physikalisch dem Verhältnis der beiden Frequenzen f1 / f2**

Konsequenz: **Der Summe zweier musikalischer Tonintervalle entspricht physikalisch dem Produkt der entsprechenden Frequenzverhältnisse.**

Tonbezeichnung:	**C**	**G**	**c**
Tonintervall:	**Quint**	**Quart**	
Frequenzverhältnis:	$\frac{f(G)}{f(C)}=\frac{3}{2}$	$\frac{f(c)}{f(G)}=\frac{4}{3}$	
Frequenz	**f(C)**	**f(G)**	**f(c)**
	Oktav		

Andere Schreibweise: $f(c)=\frac{4}{3}f(G)=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}f(C)\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}f(C)=\frac{2}{1}f(C)$

Quint + Quart	**= Oktav**
$\frac{f(G)}{f(C)}\cdot\frac{f(c)}{f(G)}$	$=\frac{f(c)}{f(C)}$
$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$	$=\frac{2}{1}$

Konsequenz: **Der Differenz zweier musikalischer Tonintervalle entspricht physikalisch der Quotient der entsprechenden Frequenzverhältnisse.**

Oktav - Quart	**= Quint**
$\frac{f(c)}{f(C)}\Big/\frac{f(c)}{f(G)}$	$\frac{f(G)}{f(C)}$
$\frac{2}{1}\Big/\frac{4}{3}$	$=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Aufgabe: Berechnen Sie das Frequenzverhältnis für einen **Ganztonschritt (Sekund)** in pythagoreischer Stimmung:

Oktav			
C		G	c
Quint		Quart	
Quart	Quint		
F	Sekund	G	

C		G
Quint		Tonintervall
$\frac{f(G)}{f(C)} = \frac{3}{2}$		Frequenzverhältnis
C	F	G
Quart	Sekund	Tonintervalle
$\frac{f(F)}{f(C)} = \frac{4}{3}$	$\frac{f(G)}{f(F)} = \frac{9}{8}$	Frequenzverhältnis
f(C)	f(F)	f(G)

Rechenschritt

Quint - Quart	= Sekund
$\frac{f(G)}{f(C)} \Big/ \frac{f(F)}{f(C)}$	$\frac{f(G)}{f(F)}$
$\frac{3}{2} \Big/ \frac{4}{3}$	$= \frac{9}{8}$

Aufgabe: **Vervollständigung der Pythagoräischen Tonleiter:**

Oktave	
Quart	Quint
4 / 3	3 / 2

Frequenzverhältnis relativ zum Vorgänger (Ganzton bzw. Halbtonschritt)

C	D	E	F	G	A	H	C
Sekund	Sekund	Halbton	Sekund	Sekund	Sekund	Halbton	
9 / 8	9 / 8		9 / 8	9 / 8	9 / 8		

Terz	Halbton	Tritonus	Halbton
$(9 / 8)^2 = 81 / 64$	256 / 243	$(9 / 8)^3 = 729 / 512$	256 / 243

Frequenzverhältnis relativ zum Grundton C

C	D	E	F	G	A	H	C
1	9 / 8	81 / 64	4 / 3	3 / 2	27 / 16	243 / 128	2

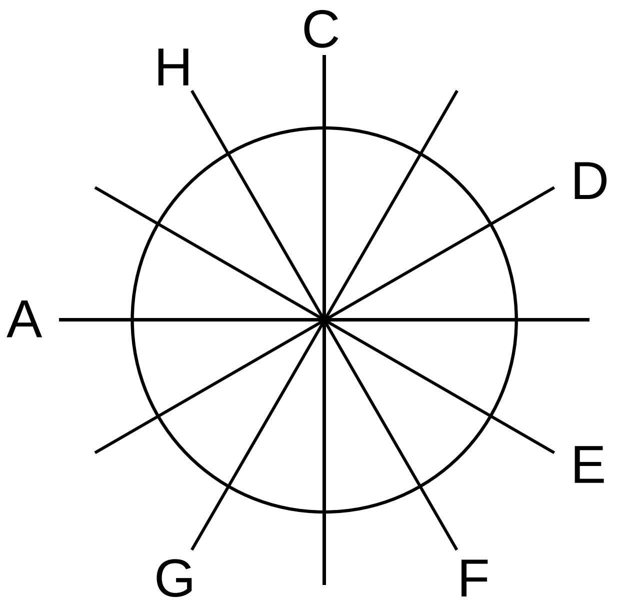
Berechnung des pythagoräischen Halbtonschrittes:

Quart - Terz: $$\frac{4}{3}\Big/\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{2\cdot 2}{3}\left(\frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 2^3 = \frac{256}{243}$$

Quint - Tritonus: $$\frac{3}{2}\Big/\left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 2^3 = \frac{256}{243}$$

⇒ Die **Quint (f' / f = 3 / 2)**
spielt die entscheidende Bedeutung beim Aufbau der pythagoräischen Tonleiter

3.1.2 Aufbau der pythagoräischen Tonleiter über den Quintenzirkel



Prinzip:

- **Quintensprünge aufwärts (im Urzeigersinn):** **Multiplikation mit Faktor (3/2)**
- **Quintensprünge abwärts (gegen Urzeigersinn):** **Multiplikation mit Faktor (2/3)**
- **Bei Überschreiten der Oktave** **Runteroktavieren Faktor (1/2)**

F	**C**	**G**	**D**	**A**	**E**	**H**
$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{4}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{5}$	
1 Oktav nach oben		1 Oktave nach unten		2 Oktaven nach unten		
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$	
F	**C**	**G**	**D**	**A**	**E**	**H**
$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{243}{128}$

Weiterführung liefert die **Halbtöne** **H - Fis - Cis - Gis - Dis - Ais - Eis - C**

Problem rationaler Frequenzverhältnisse: **Quintenzirkel schliesst sich nicht !**

Aufgrund der Anzahl der Halbtonschritte müsste gelten:

$$\frac{\text{Quint}}{\text{Oktave}} = \frac{7}{12} \Rightarrow \qquad \text{12 Quinten = 7 Oktaven}$$

Es gilt jedoch: $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \neq 2^{7}$

Die Tondifferenz bei Kreisschluß des Quintenzirkels nennt man

pythagoräisches Komma $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \Big/ 2^{7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$

3.2 Naturtonreihe / Blechbläser / Diatonische Tonleiter

Versuch: Messung der Frequenzen des Heulrohres mit Oszilloskop

Diese Töne kommen durch eine Resonanz der Luftströmung im Inneren des Rohres zu Stande. Abhängig von der Geschwindigkeit wird jeweils nur einer der Partialtöne verstärkt. Die entstehenden Töne bilden zusammen die sogenannte Naturtonreihe. Sie entsteht auch bei vielen Musikinstrumenten, z.B. bei Blechbläsern.

Die Folge der (musikalischen) Naturtonreihe entspricht
der Folge der (physikalischen) Harmonischen (Obertöne bzw. Partialtöne)

C1	C	G	c	e	g	b	c^1	d^1	e^1
f_0	$2 f_0$	$3 f_0$	$4 f_0$	$5 f_0$	$6 f_0$	$7 f_0$	$8 f_0$	$9 f_0$	$10 f_0$

Die Intervalle zwischen den Obertönen sind deshalb von Natur aus konsonant

<table>
<tr><td>$\frac{2}{1}$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{4}{3}$</td><td>$\frac{5}{4}$</td><td>$\frac{6}{5}$</td><td>$\frac{7}{6}$</td><td>$\frac{8}{7}$</td><td>$\frac{9}{8}$</td><td>$\frac{10}{9}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Oktave</td><td>Quint</td><td>Quart</td><td>große Terz</td><td>kleine Terz</td><td></td><td></td><td>große Sekund</td><td>kleine Sekund</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Oktave</td><td colspan="2">Quint</td><td colspan="2">Quart</td><td colspan="2" rowspan="2">große Terz</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Oktave</td><td></td></tr>
</table>

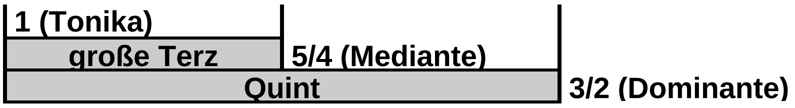
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">kleine Sexte</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4">große Sexte</td><td></td></tr>
</table>

Versuch: Messung der Frequenzen der Trompete mit Oszilloskop

Naturtöne der Trompete: 116,5 Hz (B), 233 Hz (b), 349,5 Hz (f), 466 Hz (b')
Ventile verlängern das Hauptrohr entsprechend
Man benötigt nur 3 Ventile, um alle chromatischen Töne zu erzeugen !!!!!!!!

1. Ventil	große Sekund	9 / 8	1,125
2. Ventil	kleine Sekund	10 / 9	1,111
3. Ventil	kleine Terz	6 / 5	1,2
1.+ 2. Ventil	große Terz = große Sekund + kleine Sekund	(9 / 8)(10 / 9) = 5 / 4	1,25
1.+ 3. Ventil	große Sekund + kleine Terz	(9 / 8)(6 / 5) = 27/20	1,35
2.+ 3. Ventil	Quart = kleine Sekund + kleine Terz	(10/ 9)(6 / 5) = 4 / 3	1,33
1.+ 2.+ 3. Ventil	große Sekund + kleine Sekund + kleine Terz=	(9 / 8)(10 / 9)(6 / 5) =	
kein Ventil	Quint	3 / 2	1,5

Dur-Dreiklänge bestehen aus
Prim (Tonika), großer Terz (Mediante) und Quint (Dominante).

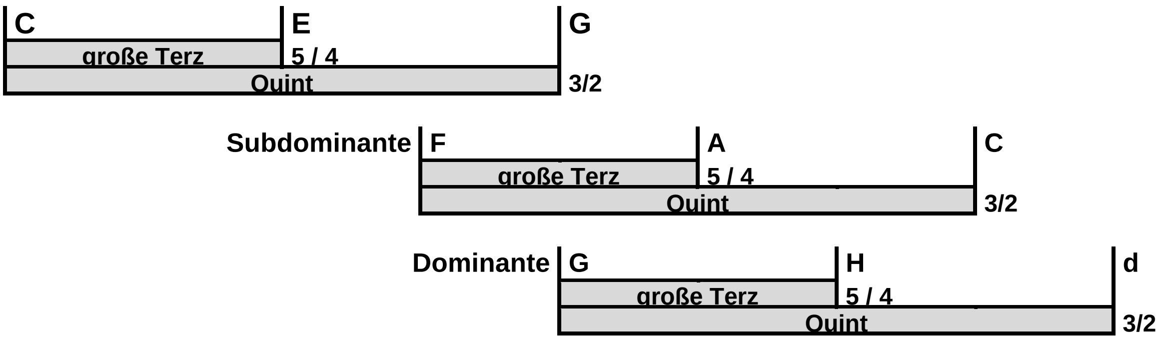


Die natürliche diatonische Dur Tonleiter ergibt sich durch
Aufbau dreier Dur-Dreiklänge auf Tonika, Dominante und Subdominante

- Tonale Musik ist auf diesen drei Stufen aufgebaut im Gegensatz zur atonalen Musik (z.B. Zwölftonmusik)

Frequenzverhältnisse relativ zum Grundton C

C	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**H**	**C**	**d**
1	**9 / 8**	**5 / 4**	**4 / 3**	**3 / 2**	**5 / 3**	**15 / 8**	**2 / 1**	**9 / 4**



Die natürliche diatonische Dur Tonleiter (Frequenzverhältnisse **relativ zum Grundton C**):

C	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**H**	**C**
1	**9 / 8**	**5 / 4**	**4 / 3**	**3 / 2**	**5 / 3**	**15 / 8**	**2**

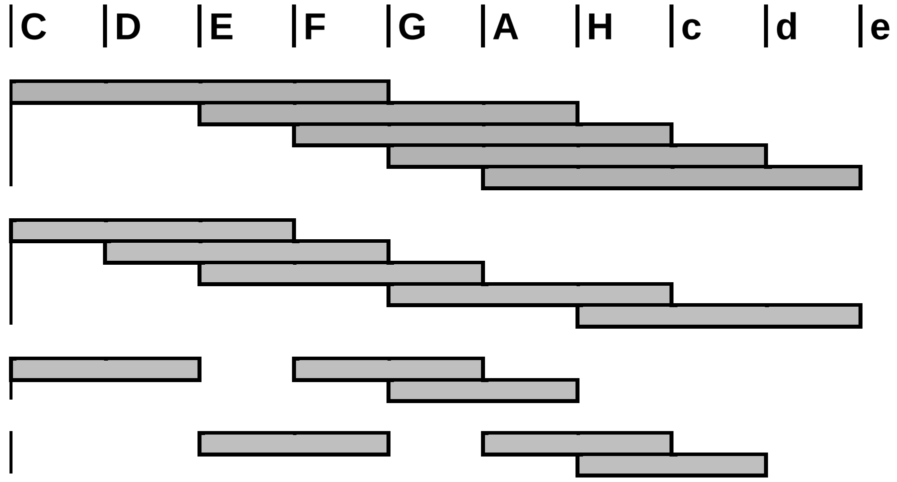
Die natürliche diatonische Dur Tonleiter (Frequenzverhältnisse **benachbarter Töne**):

$\frac{9}{8} \Big/ 1$	$\frac{5}{4} \Big/ \frac{9}{8}$	$\frac{4}{3} \Big/ \frac{5}{4}$	$\frac{3}{2} \Big/ \frac{4}{3}$	$\frac{5}{3} \Big/ \frac{3}{2}$	$\frac{15}{8} \Big/ \frac{5}{3}$	$2 \Big/ \frac{15}{8}$
9 / 8	10 / 9	16 / 15	9 / 8	10 / 9	9 / 8	16 / 15
große Sekund	kleine Sekund	Halbton	große Sekund	kleine Sekund	große Sekund	Halbton

- Alle Töne bis auf Sekund und Septime bilden mit dem Grundton Konsonanzen.
- Die diatonische Tonleiter erfüllt optimal die Forderung nach einer harmonischen Zusammenstellung und wird auch **"Reine" Tonskala** bzw. **"Reine Stimmung"** genannt.

Fülle von konsonanten Tonintervallen mit kleinen Verhältniszahlen innerhalb einer Oktave:

- **5 Quinten**
- **5 Quarten**
- **3 gr. Terzen**
- **3 kl. Terzen**



Frequenz Verhältnis	Tonintervall	Harmonie empfinden
1 : 2	Oktave	vollkommene Konsonanzen
2 : 3	Quinte	
3 : 4	Quarte	
3 : 5	große Sexte	unvollkommene Konsonanzen
4 : 5	große Terz	
5 : 6	kleine Terz	
5 : 8	kleine Sext	
4 : 7	kleine Sept	Dissonanzen
7 : 10	Tritonus	
8 : 9	großer Ganzton	
9 : 10	kleiner Ganzton	

3.3 Temperierte Stimmung / Kammerton / Gitarrengriffbrett

Orchestermusik mit Instrumenten fester Tonlage bringt die Notwendigkeit mit sich, die Einzelinstrumente aufeinander abzustimmen.

Forderungen:

- Oktave bleibt rein, d.h. $f' / f_0 = 2 / 1$
- Insgesamt 12 Halbtonschritte (Fünf Ganztöne und zwei Halbtöne)
- Jeder dieser 12 Halbtonschritte sollte als Grundton einer Tonleiter einsetzbar sein.

Lösung: Halbtonschritte mit einheitlichem Frequenzverhältnis

$$\boxed{\frac{f_{n+1}}{f_n} = k \quad und \quad \frac{f_{12}}{f_0} = k^{12} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad k = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}12246}$$

Eine irrationales Frequenzverhältnis ist aus der pythagoreischen Zahlenmystik undenkbares Verhältnis. Wichtiger war nun das musikalische Empfinden und die prakt. Durchführbarkeit.

Die temperierte Stimmung liegt somit "vermittelnd"
zwischen der pythagoräischen und diatonischen Stimmung:

	Pythagoreisch	Diatonisch	Temperiert
c	1	1	1
d	1,12500	1,12500	1,12246
e	1,26563	1,25000	1,25992
f	1,33333	1,33333	1,33484
g	1,50000	1,50000	1,49831
a	1,68750	1,66667	1,68179
h	1,89844	1,87500	1,88775
c'	2	2	2

Kammerton A (440 Hz):

Allgemein verbindliche Festlegung der Tonskala auf eine bestimmt Tonlage innerhalb des Frequenzspektrums (Absolute Schwingungszahlen)

Logarithmisches Intervallmaß (siehe Weber-Fechner) in Analogie zum Schalldruckpegel:

- Die relativen Frequenzen aufeinanderfolgender Oktaven bilden die Potenzreihe von 2

$$Z = 1200 \cdot \log_2 \frac{f_1}{f_2} = \frac{1200}{\log 2} \cdot \log \frac{f_1}{f_2}$$

- Die dimensionslose Einheit (analog zu dB) wird hier **Cent** genannt
- Der Faktor 1200 entspricht der Vereinbarung, die Oktave in 1200 gleiche Intervalle einzuteilen.
- Ein Halbtonschritt entspricht dem Intervallmaß 100 Cent