

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830):



Jede beliebige periodische Funktion lässt sich in eindeutiger Weise aus harmonischen Funktionen zusammensetzen:

$$a(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n * \sin(n\omega_1 t + \phi_n)]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [[a_n * \sin(n\omega_1 t)] + [b_n * \cos(n\omega_1 t)]]$$

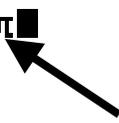
Dabei ist a_0 ein fester Wert unabhängig der Kreisfrequenz ω_0 . Die beiden **Fourierkoeffizienten a_n und b_n (Index n)** sind die eigentlich interessanten Bestandteile, welche anhand fest gegebener Algorithmen berechnet werden können.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

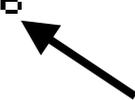
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

Einstellen der Fenstergröße (WINDOW)

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=3π
Xscl=0
Ymin=0
Ymax=0
Yscl=0
Xres=1
```



```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=9.4247779...
Xscl=π/6
Ymin=0
Ymax=0
Yscl=0
Xres=1
```

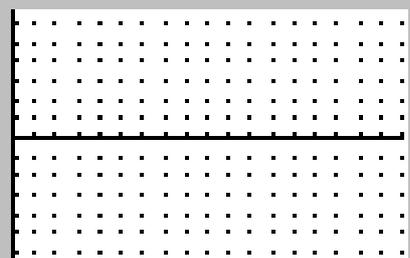


```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=9.4247779...
Xscl=.52359877...
Ymin=-1.1
Ymax=1.1
Yscl=1/6
Xres=1
```



Hilfslinien einblenden:
FORMAT [2nd+ZOOM]

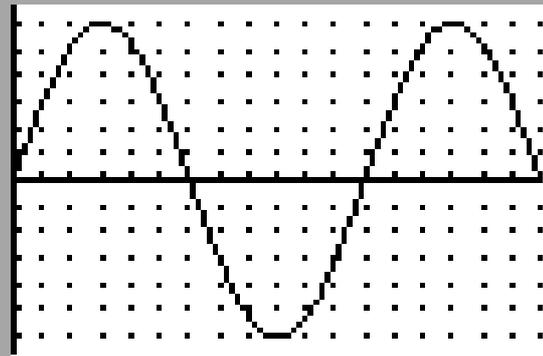
```
RectGC PolarGC
CoordOff CoordOff
GridOff GridOn
AxesOff AxesOff
LabelOff LabelOn
ExprOff ExprOff
```



Fouriersynthese einer Rechteckschwingung (GTR)

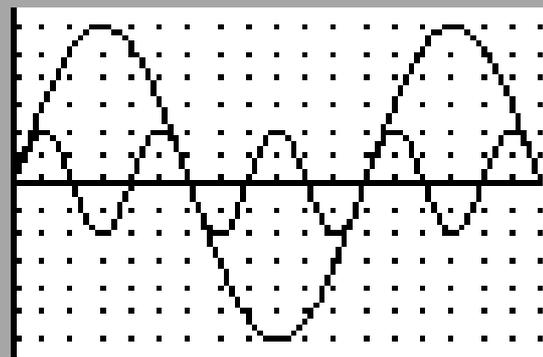
```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1   sin(X)
\Y2 =
\Y3 =
\Y4 =
\Y5 =
\Y6 =
\Y7 =
    
```



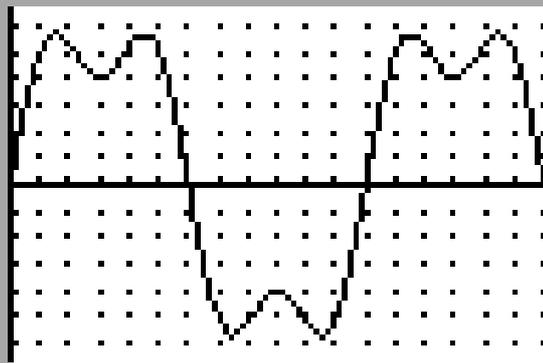
```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1   sin(X)
\Y2 =
\Y3  sin(3X)/3
\Y4 =
\Y5 =
\Y6 =
\Y7 =
    
```



```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1 = sin(X)
\Y2 =
\Y3 = sin(3X)/3
\Y4 =
\Y5 =
\Y6 =
\Y7  Y1 + Y3
    
```



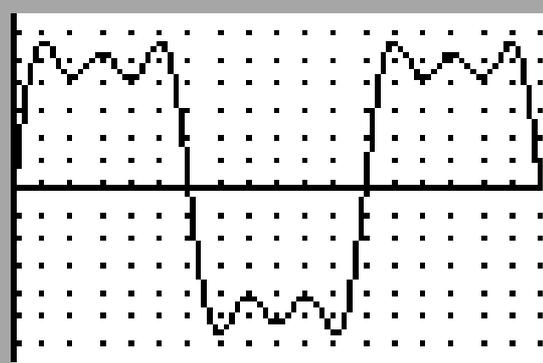
```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1 = sin(X)
\Y2 =
\Y3 = sin(3X)/3
\Y4 =
\Y5  sin(5X)/5
\Y6 =
\Y7  Y1 + Y3
    
```

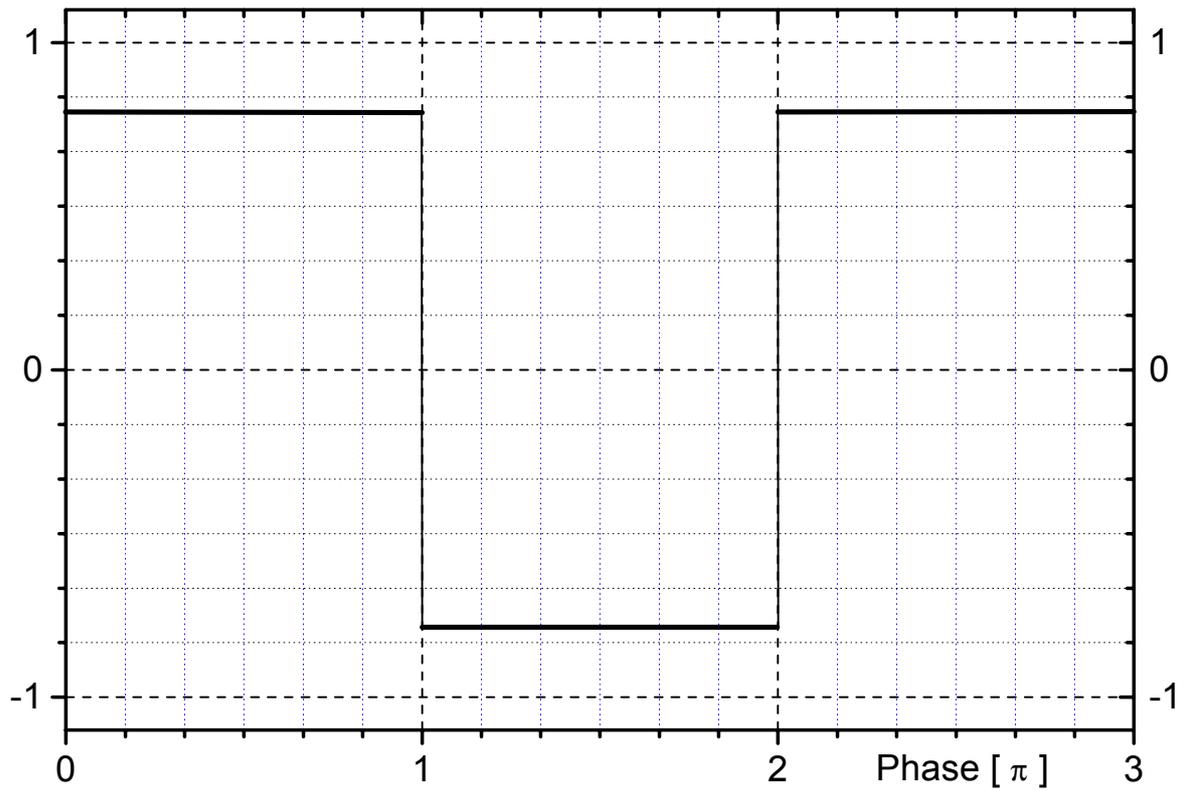


```

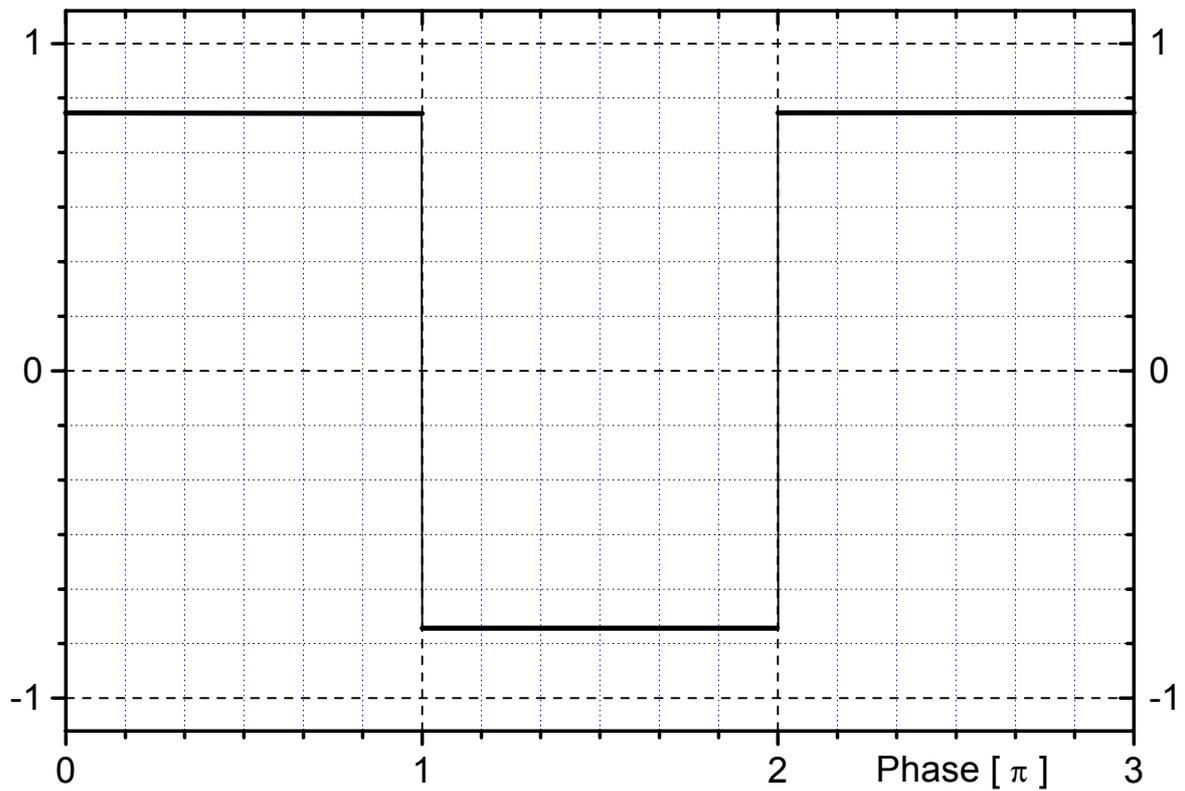
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1 = sin(X)
\Y2 =
\Y3 = sin(3X)/3
\Y4 =
\Y5 = sin(5X)/5
\Y6 =
\Y7  Y1 + Y3 + Y5
    
```



Fouriersynthese einer Rechteckschwingung

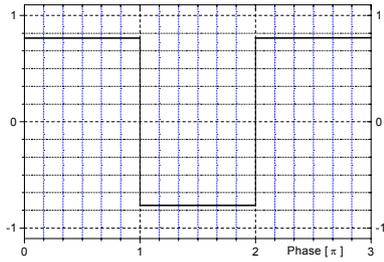


Fouriersynthese einer Rechteckschwingung

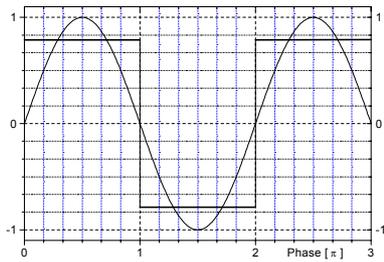


Fouriersynthese einer Rechteckschwingung

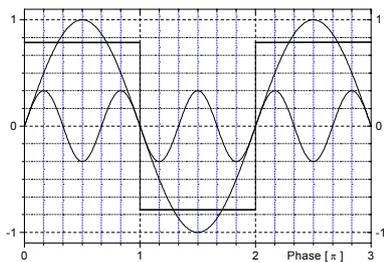
Rechteckschwingung



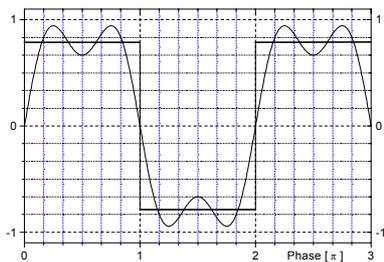
$$Y_1 = \sin(x)$$



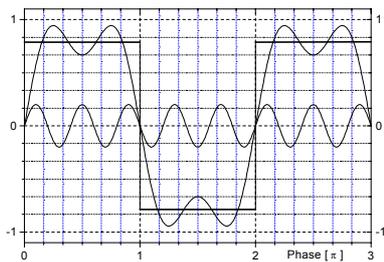
$$Y_3 = \sin(3x)/3$$



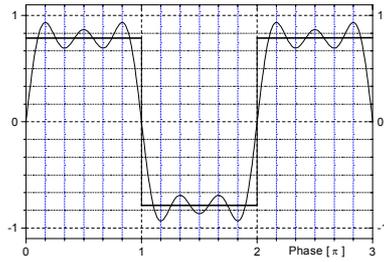
$$Y_1 + Y_3 = \sin(x) + \sin(3x)/3$$



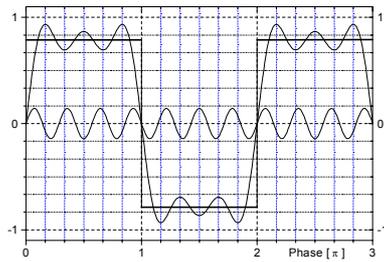
$$Y_5 = \sin(5x)/5$$



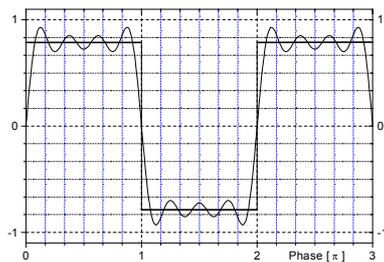
$$Y = Y_1 + Y_3 + Y_5$$



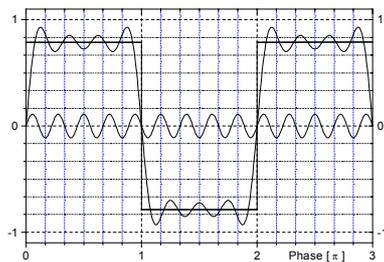
$$Y_7 = \sin(7x)/7$$



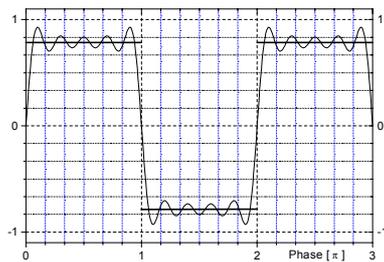
$$Y = Y_1 + Y_3 + Y_5 + Y_7$$



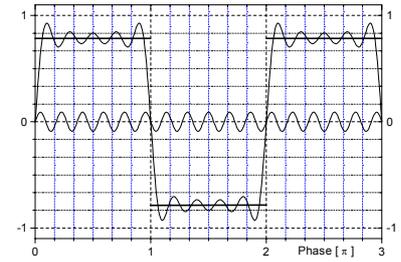
$$Y_9 = \sin(9x)/9$$



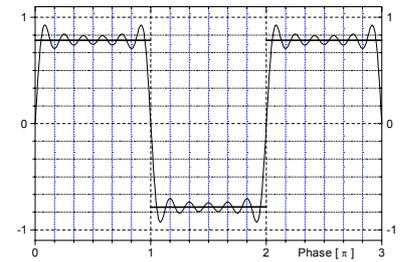
$$Y = Y_1 + Y_3 + Y_5 + Y_7 + Y_9$$



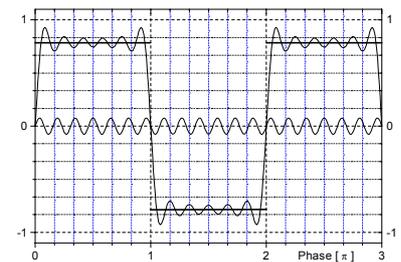
$$Y_{11} = \sin(11x)/11$$



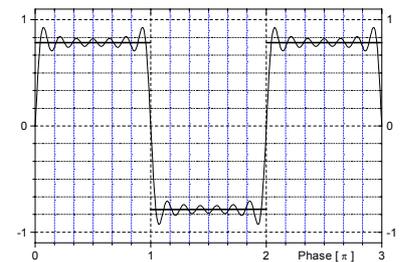
$$Y = Y_1 + Y_3 + Y_5 + Y_7 + Y_9 + Y_{11}$$



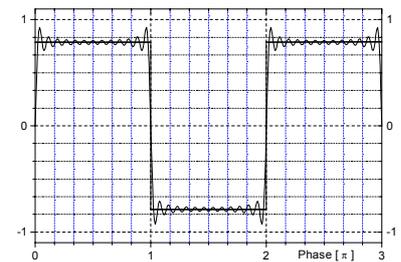
$$Y_{13} = \sin(13x)/13$$



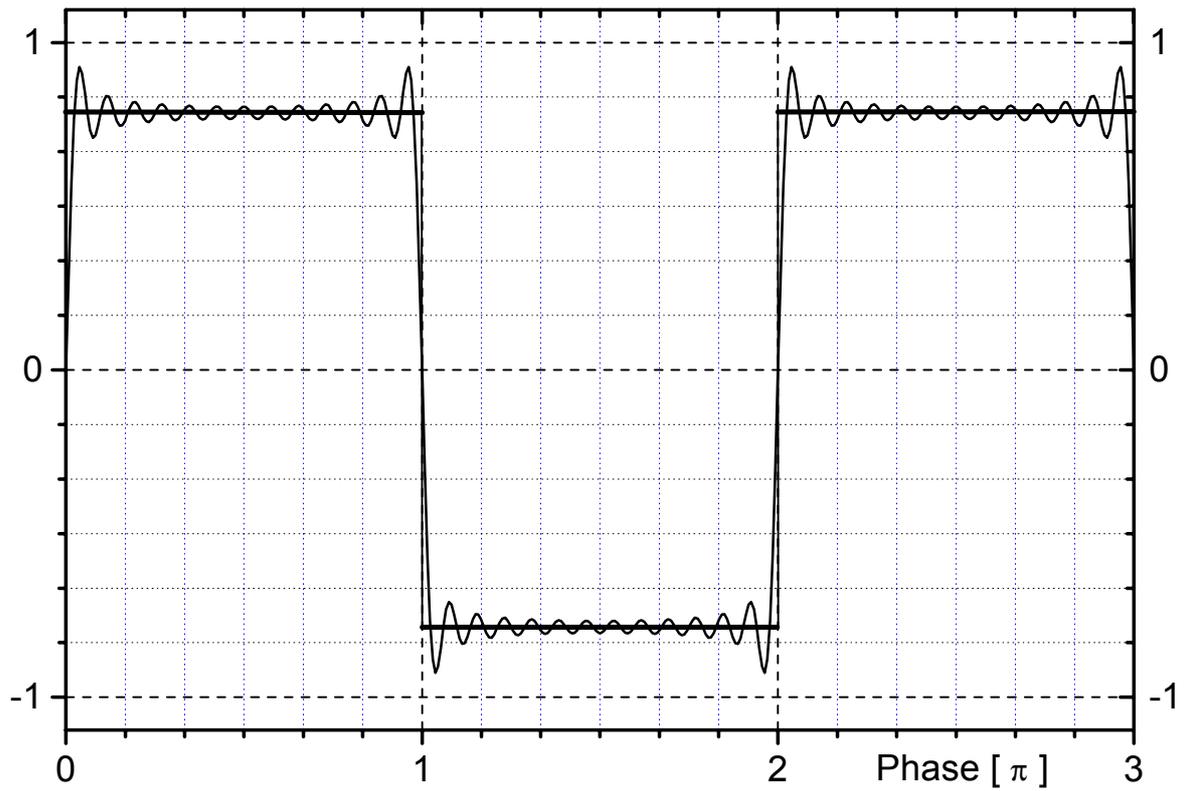
$$Y = Y_1 + Y_3 + Y_5 + Y_7 + Y_9 + Y_{11} + Y_{13}$$



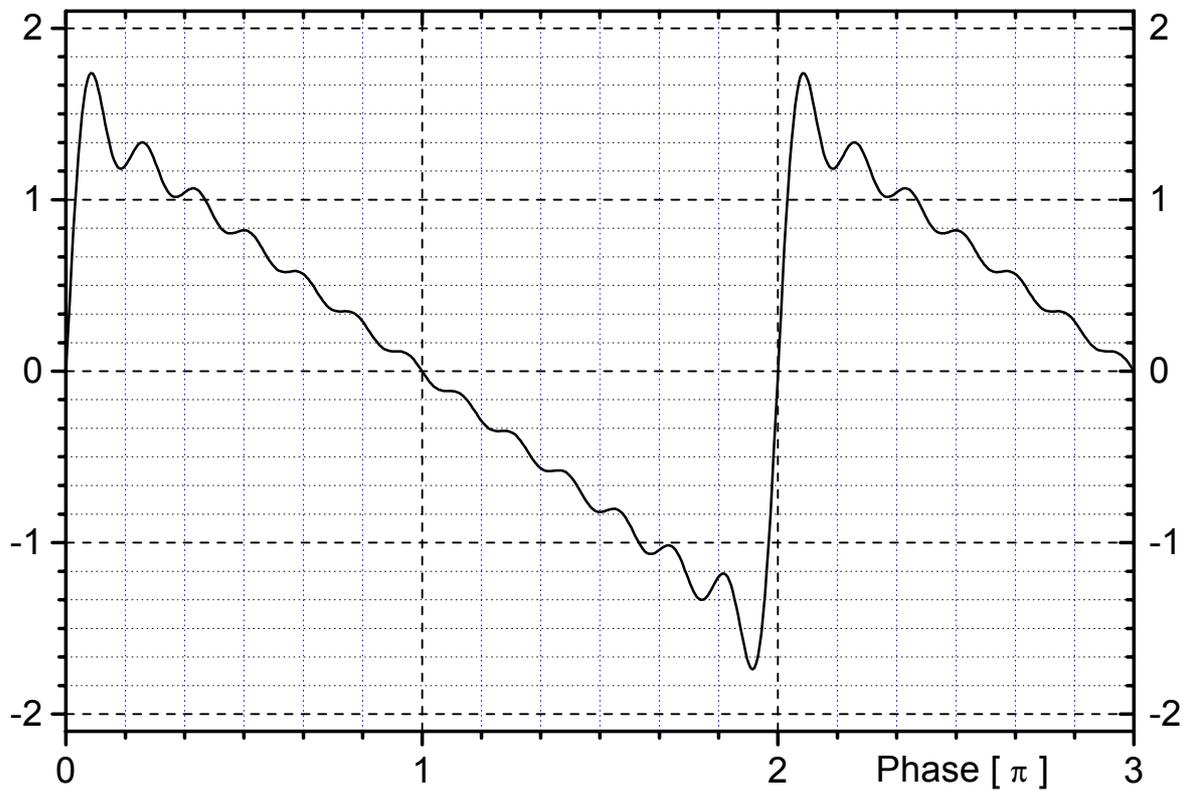
$$Y = Y_1 + Y_3 + Y_5 + \dots + Y_{35}$$



Fouriersynthese einer Rechteckschwingung



Fouriersynthese einer Sägezahnsschwingung



Die Randbedingungen eines Wellenträgers legen seine Eigenfrequenzen fest:

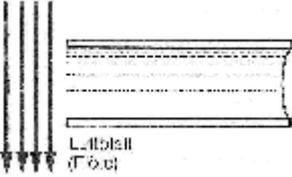
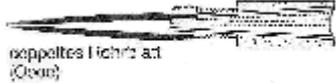
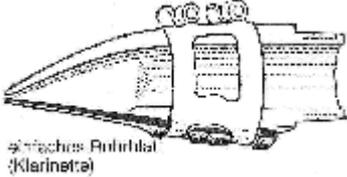
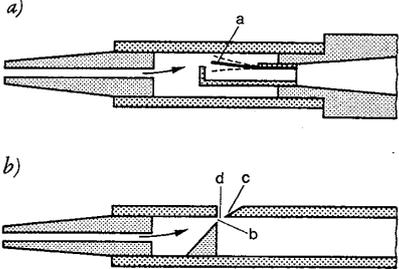
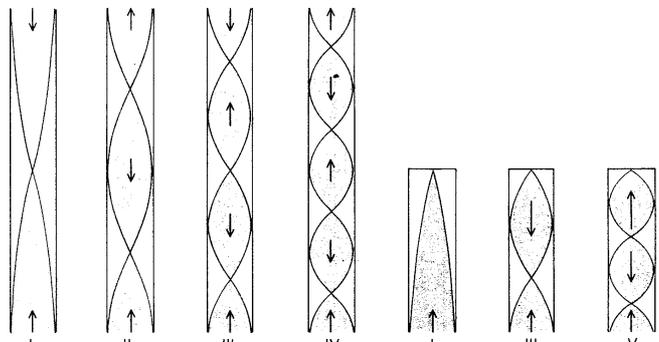
Randbedingung	Schnelle-	Druck	Phasensprung bei Reflexion
Festes bzw. geschlossenes Ende			
Freies bzw. offenes Ende			

Beidseitig begrenzter Wellenträger					
Ord.	Maximale Elongation		Länge $L(\lambda_k)$	Wellenlänge $\lambda_k (L)$	Eigenfrequenz f_k
1					
2					
3					
k	Knoten Bäuche				

Gemischte Randbedingungen (fest / frei bzw. offen / geschlossen)					
Ord.	Maximale Elongation		Länge $L(\lambda_k)$	Wellenlänge $\lambda_k (L)$	Eigenfrequenz f_k
1					
2					
3					
k	Knoten Bäuche				

Beidseitig freier bzw. offener Wellenträger					
Ord.	Maximale Elongation		Länge $L(\lambda_k)$	Wellenlänge $\lambda_k (L)$	Eigenfrequenz f_k
1					
2					
3					
k	Knoten Bäuche				

Schwingungsanregung / Blasinstrumente

Lippenpfeifen / Luftblatt	Zungenpfeifen / Lippen	
		
<p>Beispiele:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Blockflöte, ▪ Querflöte, ▪ Orgel 	 <p>a) offene Zungenpfeife b) offene Lippenpfeife a Zunge, b Spalt, c Schneide, d Maulweite.</p>	<p>Beispiele:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Klarinette, Saxophon ▪ Oboe, Fagott, Stimme ▪ Schnarrwerk (Orgel)
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Änderung der Luftgeschwindigkeit (Luftblatt bei Querflöte) ▪ Wirbelablösung an Schneide (Lippenpfeife, Blockflöte) 		<ul style="list-style-type: none"> ▪ Druckgesteuerte Oszillatoren ("Ventile") ▪ Rohrblätter / Metallzunge <ul style="list-style-type: none"> ▪ einfach (Klarinette, Sax) ▪ doppelt (Oboe, Fagott) ▪ Lippen des Spielers
Randbedingungen:		
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Schnellebauch am Anregungsende ▪ gleiche Randbedingungen ▪ alle Obertöne, d.h. alle Vielfachen der Grundfrequenz $f_k = k (c/2L)$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Druckbauch am Rohrblatt ▪ gemischte Randbedingungen ▪ nur ungeradzahlige Vielfache der Grundfrequenz $f_k = (2k-1)(c/4L)$ 	
Klangeindruck		
Klarer, reiner Klang	Schnarrender Klang	
Bemerkungen		
<p>Visualisierung der Luftblattschwingungen http://members.aol.com/ReinerJank/emden.html</p> <p>Wirbelablösung in der Natur:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ an zylindrischen Masten oder Drähten ▪ Surren der Hochspannungsleitungen mit der Frequenz $f = 0.185 v/d$ <ul style="list-style-type: none"> ▪ prop. zur Windgeschwindigkeit v ▪ umgekehrt prop. Drahtdurchmesser d 	<p>Offene (links) und Gedackte Pfeifen (rechts)</p> 	
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Die Zunge bzw. das Rohrblatt bzw. die Lippen eines Blechbläusers und die Luftsäule bilden ein gekoppeltes Resonatorsystem 	<p>Gedackte Pfeifen (Schallbecher geschlossen und damit gemischte Randbedingungen)</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ klingen eine Oktave tiefer (d.h. halbe Frequenz) als offene Pfeifen gleicher Länge ▪ haben nur ungeradzahlige Harmonische 	

Menschliche Stimme/ Vokaltrakt

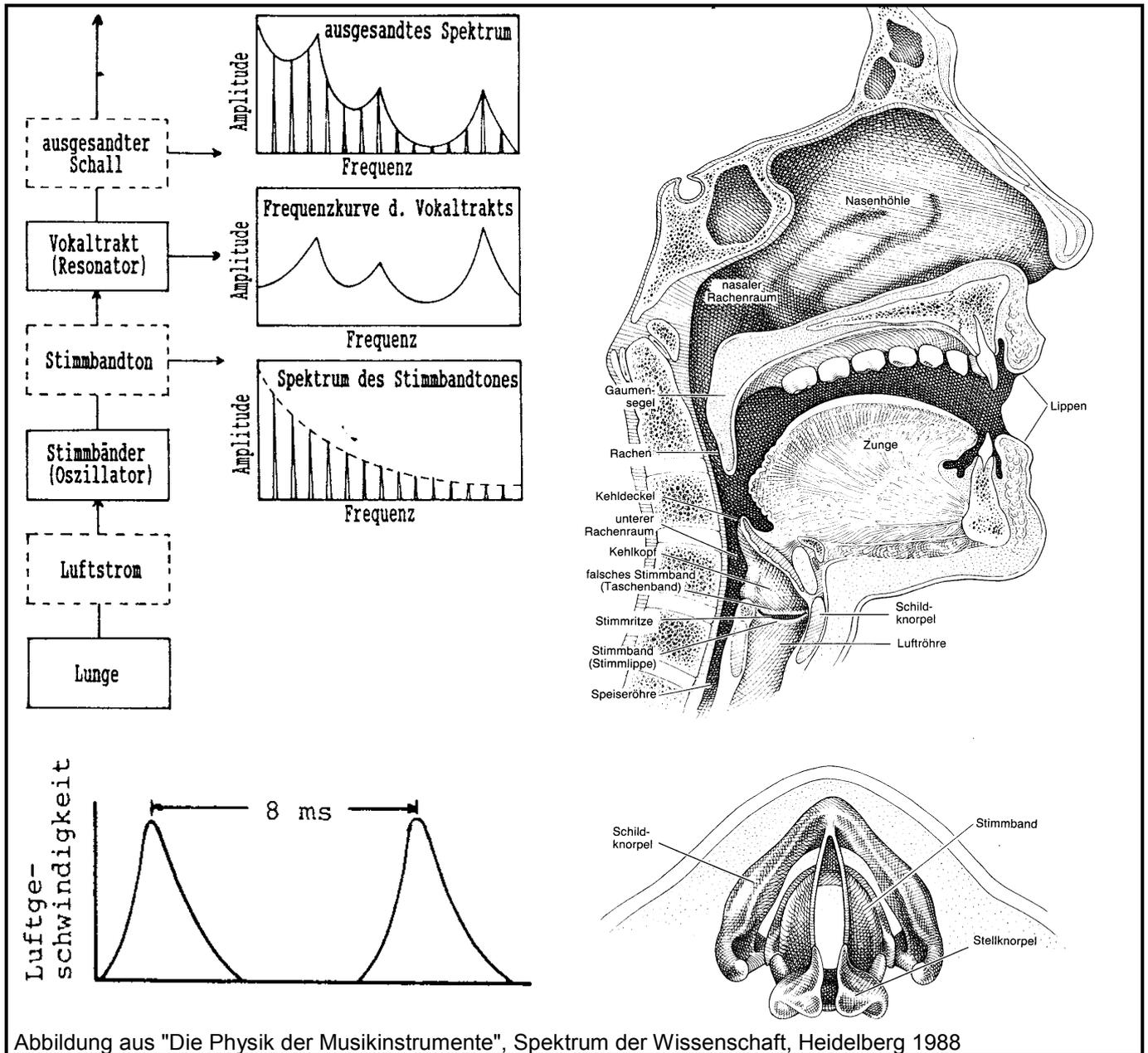
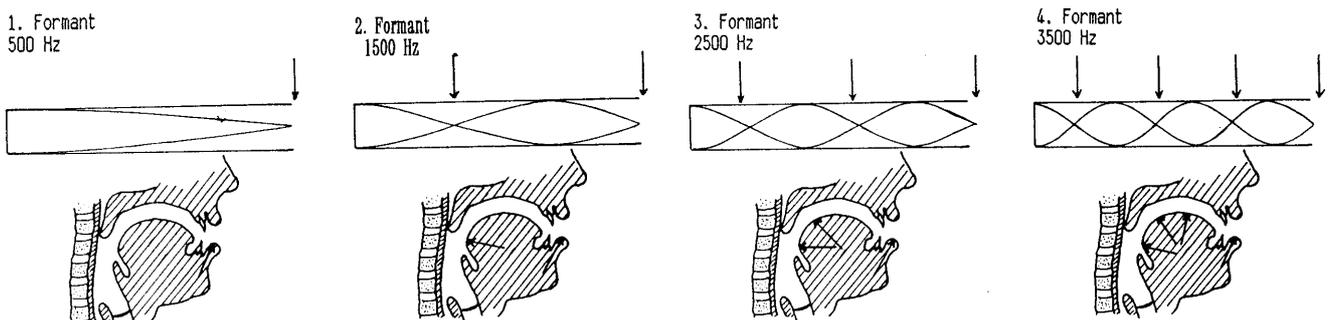


Abbildung aus "Die Physik der Musikinstrumente", Spektrum der Wissenschaft, Heidelberg 1988

Vokaltrakt / Resonanzkörper (Rachen- und Mundraum (primär), Nasenraum (sekundär))

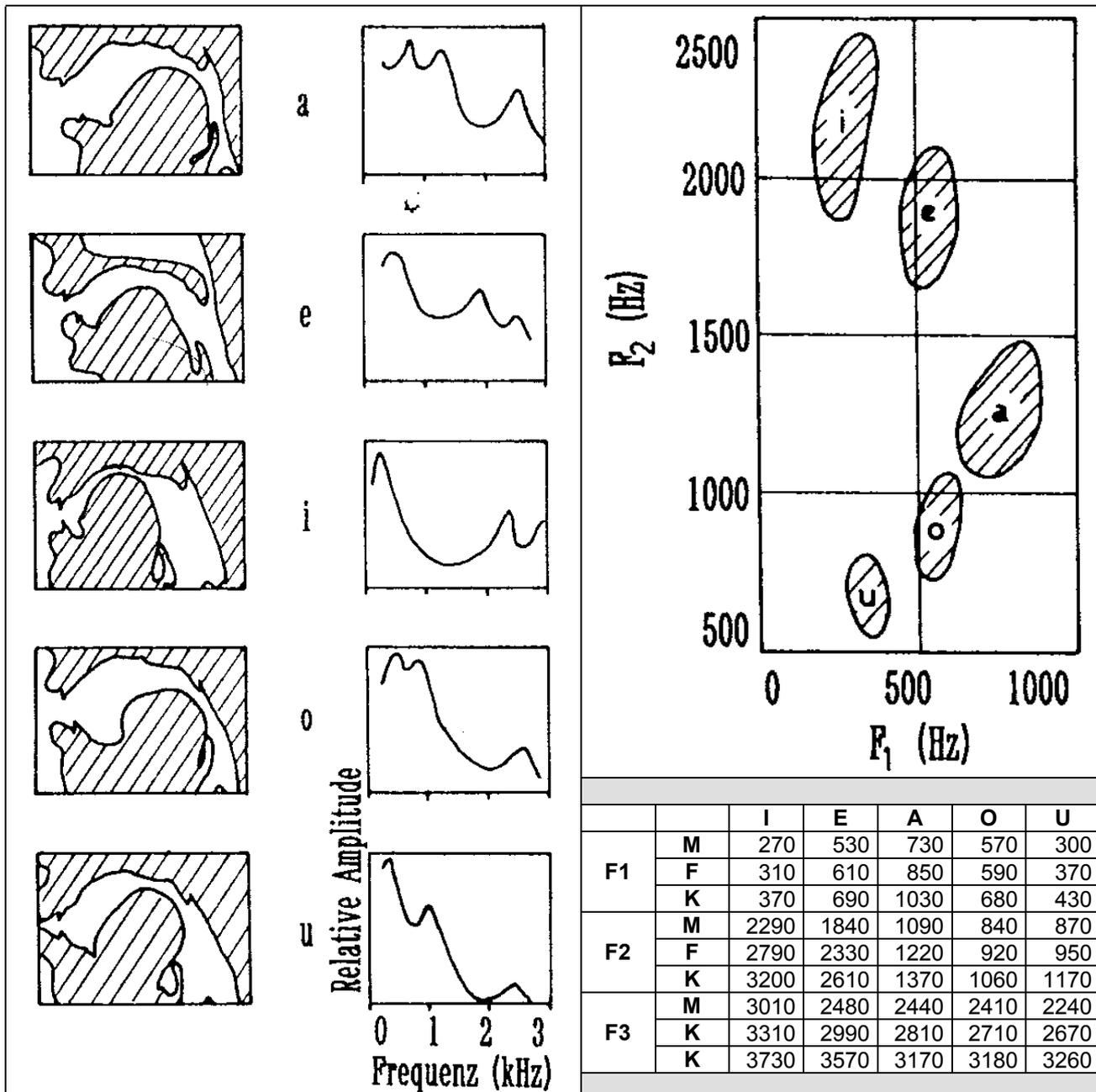
- Modell einer einseitig geschlossenen **Luftsäule der Länge 17,5cm**
- Dies ergibt eine **Grundfrequenz** von $f = c/4\lambda = 344 / 0,7 \text{ Hz} \approx 500 \text{ Hz}$
- siehe Abb.: Knotenpunkte des Drucks (!!!) durch Pfeile markiert

Die Resonanzbereiche für Grund- und Oberschwingungen nennt man Formanten



Formanttheorie der Vokale

- Die Formanten können durch **Veränderungen der Luftsäule** (Kiefer- und Zungenbewegung) im Frequenzbereich verschoben werden.
- Die Abbildung vergleicht **Röntgenaufnahmen beim Sprechen der Vokale a, e, i, o, u** mit den Einhüllenden der dazugehörigen Frequenzspektren.
- Zur Charakterisierung der Vokale reichen höchstens **zwei bis drei Formanten**.
- In der Tabelle sind die Durchschnittswerte der ersten drei Formanten für die Vokale angegeben, jeweils für Männer, Frauen und Kinder. Zur besseren Übersicht trägt man die ersten beiden Formantfrequenzen in einer sogenannten **Formantkarte** gegeneinander auf.



In grober Näherung kann man sagen, daß der

- erste Formant** mit der **vertikalen Stellung** (oben = tiefe Frequenz, unten = hohe Frequenz)
- zweite Formant** mit der **horizontalen Stellung** (vorne = hohe Frequenz, hinten = tiefe Frequenz)

der Zunge zusammenhängt.

